

MÉTHODES DE CHAIN LADDER ET MACK

KOROTOUMOU TRAORÉ, FRANCK VERMET

1. INTRODUCTION

Dans cette application sont implémentées différentes méthodes pour calculer le montant de provisions pour sinistres à payer, ainsi que les marges d'erreur associées. Les méthodes les plus classiques sont les méthodes de Chain Ladder et Mack, qui sont présentées dans ce premier onglet. Dans les autres onglets de l'application sont implémentées les méthodes de GLM Poisson et une méthode basée sur des simulations Monte Carlo. Il existe de nombreuses références bibliographiques sur le sujet. Les références mentionnées dans la bibliographie ([1], [2], [3], [4], [5], [6], [7]) ont été utilisées pour les méthodes de Chain Ladder et Mack.

2. DONNÉES

Le fichier des données doit être un fichier au format .xlsx, contenant les paiement cumulés ou bien les incréments de paiement, avec un entête (header) ou non.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
2	1376384	1211168	535883	313790	168142	79972	39235	15030	10865	4086	
3	1576278	1437150	652445	342694	188799	76956	35042	17089	12507		
4	1763277	1540231	678959	364199	177108	78169	47391	25288			
5	1779698	1498531	661401	321434	162578	84581	53449				
6	1843224	1573604	613095	299473	176842	106296					
7	1962385	1520298	581932	347434	238375						
8	2033371	1430541	633500	432257							
9	2072061	1458541	727098								
10	2210754	1517501									
11	2206886										
12											

Les cellules sous la diagonale peuvent être vides ou contenir des valeurs arbitraires ("NA" ou 0 par exemple). Dans ce premier onglet "Données" sont affichés les tableau des montants cumulés et des incréments, l'un se déduisant aisément de l'autre en fonction du tableau en entrée.

3. TABLEAU COMPLÉTÉ ET RÉSULTATS

Nous noterons :

- $i \in \{1, \dots, n\}$ les années de survenance (en ligne),
- $j \in \{1, \dots, n\}$ les années de développement (en colonne),
- $C_{i,j}$ les paiements cumulés, connus pour $1 \leq i \leq n$ et $j \leq n - i + 1$.

La méthode de Chain Ladder suppose qu'il existe une relation de récurrence :

$$\mathbf{H}_0 : C_{i,j+1} = \lambda_j C_{i,j}, \text{ pour tous } i, j = 1, \dots, n.$$

Nous définissons alors les facteurs de développement qui sont des estimateurs naturels des λ_j :

$$\hat{\lambda}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j+1}}{\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j}}.$$

Les facteurs de développement permettent alors de compléter le triangle cumulé par des estimations des montants futurs :

$$\hat{C}_{i,j} = \hat{\lambda}_{n+1-j} \dots \hat{\lambda}_{j-1} C_{i,n+1-j}.$$

A partir des charges ultimes estimées $\hat{C}_{i,n}$, il est alors possible d'estimer les montants de provisions par année de survénance :

$$\hat{R}_i = \hat{C}_{i,n} - C_{i,n-i+1}$$

et la provision globale $\hat{R} = \sum_{i=2}^n \hat{R}_i$.

Les méthodes stochastiques ont été introduites pour pouvoir mesurer la volatilité des réserves. La méthode de Mack est une méthode faisant intervenir la notion d'incertitude dans la méthode déterministe de Chain Ladder et s'appuie sur trois hypothèses :

H₁ : Les années de survénance des sinistres sont indépendantes les unes des autres, ce qui se traduit par le fait que $(C_{i,j})_j$ et $(C_{k,j})$ sont indépendants si $i \neq k$.

H₂ : $\forall i = 1, \forall j, \mathbb{E}[C_{i,j+1} | C_{i,1}, \dots, C_{i,j}] = \lambda_j C_{i,j}$

H₃ : $\forall i = 1, \forall j, \mathbb{V}[C_{i,j+1} | C_{i,1}, \dots, C_{i,j}] = \sigma_j^2 C_{i,j}$

Mack propose les estimateurs sans biais suivants :

$$\hat{\lambda}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j+1}}{\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j}}$$

et

$$\hat{\sigma}_j^2 = \frac{1}{n-j-1} \sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j} \left(\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} - \hat{\lambda}_j \right)^2, \quad j = 1, \dots, n-2,$$

puis $\hat{\sigma}_{n-1}^2 = \min \left(\frac{\hat{\sigma}_{n-2}^4}{\hat{\sigma}_{n-3}^2}, \min(\hat{\sigma}_{n-3}^2, \hat{\sigma}_{n-2}^2) \right)$.

La méthode de Chain Ladder fournit un estimateur \hat{R} de la provision totale R . L'incertitude liée à cette estimation se mesure classiquement par la *mean square error* (MSE) :

$$\mathbb{E}[(\hat{R} - R)^2].$$

Mais dans le cas présent, R est aussi aléatoire et ne peut être obtenue qu'en réalisant une prédiction à partir des données passées. On utilise donc plutôt la *mean square error prediction* (MSEP) :

$$MSEP(\hat{R}) = \mathbb{E}[(\hat{R} - R)^2 | D],$$

où $D = \{C_{i,j}, i + j \leq n + 1\}$. Sous les hypothèses H_1, H_2 et H_3 , Mack (1993)[6] obtient une estimation explicite de $MSEP(\hat{R})$:

$$\widehat{MSEP}(\hat{R}) = \sum_{i=2}^n \left[\widehat{MSEP}(\hat{R}_i) + \hat{C}_{i,n} \left(\sum_{l=i+1}^n \hat{C}_{l,n} \sum_{j=n-i+1}^{n-1} \frac{2\hat{\sigma}_j^2}{\hat{\lambda}_j^2 \sum_{k=1}^{n-j} C_{k,j}} \right) \right],$$

avec

$$\widehat{MSEP}(\hat{R}_i) = \hat{C}_{i,n}^2 \sum_{j=n-i+1}^{n-1} \frac{\hat{\sigma}_j^2}{\hat{\lambda}_j^2} \left(\frac{1}{\hat{C}_{i,j}} + \frac{1}{\sum_{k=1}^{n-j} C_{k,j}} \right).$$

C'est la valeur du $\widehat{MSEP}(\hat{R})$, appelée aussi variance totale, qui est calculée par l'application.

Le modèle de Mack est un modèle non paramétrique, il ne fait pas d'hypothèse sur la loi des composantes du triangle. Cependant, en faisant l'hypothèse que R suit une loi normale (ou lognormale), on peut calculer un quantile pour la provision totale, en estimant l'espérance de R par \hat{R} et en prenant comme variance l'estimateur de la volatilité $\widehat{MSEP}(\hat{R})$.

4. TESTS

Dans l'onglet Test, nous procédons à quelques tests permettant de vérifier si les hypothèses des modèles de Chain Ladder et de Mack sont satisfaites.

Nous définissons les facteurs individuels de développement $f_{ij} = \frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}}$.

Le premier test est un test d'indépendance entre les différentes années de survenance (hypothèse H_1). Il s'agit d'un test basé sur la façon dont se répartissent les facteurs individuels de développement autour de leur valeur médiane, pour chaque année de développement. Sous l'hypothèse d'indépendance, on doit observer une répartition aléatoire des valeurs. Les détails de ce test sont présentés dans les mémoires de Bonnefoy et Devictor [1] et Phan Ngoc [7]. Si l'hypothèse d'indépendance est vérifiée, la statistique calculée suit une loi normale centrée réduite : l'intervalle d'acceptation au niveau de rejet 0.05 est donc $[-1,96; 1,96]$.

Le second test est un test graphique qui permet de vérifier si les hypothèses H_0 et H_2 sont acceptables. Pour chaque valeur de j fixée, les f_{ij} doivent être sensiblement alignés et proche de λ_j . La ligne continue sur le graphique correspond à la valeur λ_j .

Sous les hypothèses de Mack, on peut écrire le modèle sous la forme

$$C_{i,j+1} = \lambda_j C_{i,j} + \sigma_j \sqrt{C_{i,j}} \varepsilon_{i,j},$$

où les $\varepsilon_{i,j}$ sont des variables aléatoires indépendantes, centrées et de variance unitaire. Les résidus $\varepsilon_{i,j}$ peuvent être estimés par

$$\hat{\varepsilon}_{i,j} = \frac{C_{i,j+1} - \hat{\lambda}_j C_{i,j}}{\hat{\sigma}_j \sqrt{C_{i,j}}}.$$

Sur le deuxième graphique, nous représentons les $\hat{\varepsilon}_{i,j}$ en fonction des $C_{i,j}$ pour visualiser les éventuelles valeurs aberrantes et détecter s'il existe une structure particulière du nuage de points, contraire à l'hypothèse d'indépendance.

RÉFÉRENCES

- [1] C. Bonnefoy and D. Devictor. *Calcul stochastique de provisions techniques d'assurance non-vie*. Mémoire d'actuariat de l'ENSAE, 2007.
- [2] A. Charpentier. *Computational Actuarial Science with R*. CRC Press, 2012.
- [3] A. Charpentier and C. Dutang. *L'actuariat avec R*. 2012.
- [4] R. Lailly. *Construction d'un Modèle Interne Partiel en Assurance non-vie*. Mémoire d'actuariat de l'EURIA, 2014.
- [5] M. Louis. *Evaluation des provisions techniques non-vie dans le contexte de Solvabilité II*. Mémoire d'actuariat de l'Université de Strasbourg, 2010.

- [6] T. Mack. Distribution free calculation of the standard error of chain ladder reserve estimates. *ASTIN Bulletin*, 23(2) :213–225, 1993.
- [7] H. Phan Ngoc. *Provisionnement stochastique adapté aux spécialités de la réassurance non-vie*. Mémoire d'actuariat de l'ISFA, 2015.

(Korotoumou Traoré, Franck Vermet) EURIA, UNIVERSITÉ DE BRETAGNE OCCIDENTALE, 6, AVENUE VICTOR LE GORGEU, CS 93837, F-29238 BREST CEDEX 3, FRANCE
E-mail address, Franck Vermet: `Franck.Vermet@univ-brest.fr`